אלגברה לינארית לפיזיקאים - תרגיל בית 9

1. נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}7&2&1&3&5\\2&2&0&1&2\\11&6&1&5&9\end{pmatrix}$$

עבור כל אחת מהן:

א. מצאו בסיס למרחב העמודות, שמוגדר בתור הspan של ווקטורי העמודות. מה המימד של המרחב (דרגת העמודות)?
הדרכה: כפי שראינו בתרגול, כדי למצוא בסיס ניתן לרשום את הוקטורים כשורות, לדרג, והשורות של הווקטורים השונים מאפס שנותרו לאחר תהליך הדירוג פורשים את אותו המרחב ובת"ל, ולכן הם מהווים את הבסיס (או באופן שקול, אפשר "לדרג את העמודות"). שימו לב שכדי שהווקטורים יהיו בת"ל, בתהליך הדירוג מספיק לדאוג שמתחת לאיבר הפותח יש אפסים, ולא חייבים שמעליו יהיו אפסים - זה יכול לחסוך לכם טיפה זמן (**רשות**: מדוע מספיק לוודא שמתחת לאיבר הפותח יש אפסים כדי שקבוצת הווקטורים יהיו בת"ל? הסבירו באופן איכותי).

ב. מצאו בסיס לspan של ווקטורי השורות. מהי דרגת השורות?

ג. האם מרחב העמודות שווה למרחב השורות? מהי דרגת המטריצה?

ד. האם המטריצה הפיכה?

2. בשאלה זו נחזור על כמה תכונות שלמדנו על דטרמיננטות.

א. נתונה $A=\begin{pmatrix}2&4&6\\0&5&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$. חשבו את $|A|$.

ב. נתונה $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$. בדקו כי $|B|=\frac{1}{2}|A|$.

ג. נתונה $D=\begin{pmatrix}1&2&3\\-7&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&3\\7&5&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$. בדקו שמתקיים כי $|C|+|D|=|B|$.
האם יכלתם מראש לדעת שזה מתקיים? (רמז: תסתכלו על השורה השניה בשתי המטריצות).

ד. נתונה $E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&5&0\\1&2&3\end{pmatrix}$. בדקו כי $|E|=-|B|$? (החלפת 2 שורות/עמודות במטריצה נותנת פקטור מינוס).

ה. נתונה $F=7A=\begin{pmatrix}14&28&42\\0&35&0\\-7&0&7\end{pmatrix}$. למה שווה $|F|$?

ו. הכללה של הסעיף הקודם: תהי A מטריצה מסדר $n\times n$. נניח שידוע לכם ערכה של $|A|$ למה שווה $|\alpha A|$?

ז. נתונה $G=B^T$. הראו כי $|G|=|B|$.

3. נתונות המטריצות הבאות. עבור כל אחת מהן, חשבו את הדטרמיננטה, וקבעו האם המטריצות הפיכות.
רמז: עבור A, B, C נסו להשתמש בדרך הקצרה ביותר, על ידי פיתוח הדטרמיננטה לפי השורה/העמודה עם כמה שיותר אפסים (ושימו לב למינוסים).
עבור D, E, F, נסו לפשט קודם את הצורה של הדטרמיננטה בעזרת פעולות דירוג שורה/עמודה כך שיופיעו כמה שיותר אפסים.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & \frac{1}{11} \\ 80 & 5 & 100 & -2 \\ 11 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & z \\ 0 & 2 & 0 & 0 & u \\ 0 & t & 3 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ g & h & l & 4 & w \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 19 & 21 & 3 & 11 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 4 & -4 & 3 \\ -3 & -4 & 1 & -6 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & -8 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

4. יהי a פרמטר ממשי כלשהו. עבור אילו ערכים של a הווקטורים:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

מהווים בסיס למרחב?
רמז: וקטורים הם בת"ל אם"ם כששמים אותם בעמודות (או בשורות) אז המטריצה שמתקבלת היא הפיכה (ראו שאלת רשות בסוף תרגיל בית 5), וכדי להחליט האם המטריצה הפיכה אפשר פשוט לחשב דטרמיננטה.

5. בשאלה נעשה היכרות ראשונית עם ערכים עצמיים – הנושא שנעסוק בו בהרחבה שבוע הבא.
תהי המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

א. נגדיר את **הפולינום האופייני** של המטריצה בתור:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|$$

כלומר, לכל סקלר λ התוצאה היא הדטרמיננטה של המטריצה A פחות λ פעמים מטריצת היחידה מגודל 3×3.
בעזרת חישוב ישיר של הדטרמיננטה, הוכיחו כי:

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)^2$$

ב. הסבירו מדוע המטריצה $A - \lambda I$ אינה הפיכה כאשר λ הוא אחד מהשורשים של הפולינום האופייני (כלומר, 0 או 2).

ג. (**רשות**) הוכיחו את הטענה הבאה: כאשר B היא מטריצה שאינה הפיכה, אז קיים בהכרח וקטור x שונה מאפס המקיים $Bx = 0$ (במילים אחרות, מרחב הפתרונות ההומוגניים המוגדר על ידי הווקטורים x

המקיימים $Bx = 0$, מכיל לא רק את ווקטור האפס, ולכן ממימדו גדול מאפס).

ד. העזרו בטענה בסעיף ג' כדי להסיק כי כאשר $\lambda = 0$ או $\lambda = 2$ קיים ווקטור $x \in \mathbb{R}^3$ השונה מאפס כך ש: $(A - \lambda I)\, x = 0$.

ה. עבור כל אחד משני הערכים בסעיף הקודם, מצאו מפורשות בעזרת דירוג את המרחב ההומוגני $(A - \lambda I)\, x = 0$. כלומר, מצאו בסיסים למרחב הפתרונות $Ax = 0$ ולמרחב $(A - 2I)x = 0$.
רמז: המרחב הראשון אמור להכיל וקטור בסיס אחד, והמרחב השני אמור להכיל שני וקטורי בסיס.

ו. העזרו בסעיף הקודם כדי למצוא וקטור v שונה מאפס שמקיים:

$$Av = 0$$

ובנוסף, שני וקטורים u_1, u_2 בת"ל ושונים מאפס שמקיימים:

$$Au_1 = 2u_1, Au_2 = 2u_2$$

<u>הערה</u>: הוקטור v נקרא ה**ווקטור העצמי** של A המתאים ל**ערך העצמי 0**, ואילו הווקטורים u_1, u_2 נקראים **ווקטורים עצמיים** המתאימים ל**ערך העצמי 2**.